



Wiskundige DenkActiviteiten in de nieuwe (examen)programma's

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl

www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers
2013-09-20



Rijden naar Oostenrijk



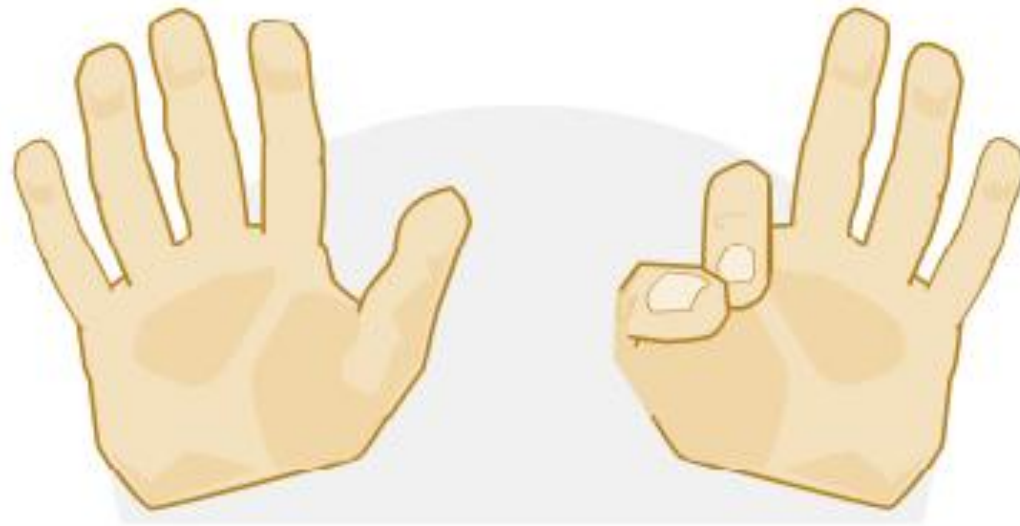
Afstand tot F

Bekend?

Afstand tot P



Vingerrekenen





Vragen deze opgaven om denkactiviteit?
Waarom?

Rode draad

- Voorbeelden
- Wat bedoelen we met denkactiviteiten?
- Kanttekeningen
- Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?
- Terugblik op voorbeelden

Rode draad

- **Voorbeelden**
- Wat bedoelen we met denkactiviteiten?
- Kanttekeningen
- Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?
- Terugblik op voorbeelden

Voorbeeld: een driehoek verdelen

- Verdeel deze stomphoekige driehoek in scherphoekige driehoeken



Voorbeeld: Op hoeveel nullen eindigt 2013! ?

5!	120	1
10!	3628800	2
15!	1307674368000	3
20!	2432902008176640000	4
25!	15511210043330985984000000	6

Voorbeeld: Twee rijtjes oefeningen

Differentieer:

a. $f(x) = 2^x$

b. $f(x) = 3^x$

c. $f(x) = (1/2)^x$

d. $f(x) = (1/3)^x$

Differentieer:

a. $f(x) = 2^x$

b. $f(x) = 3^x$

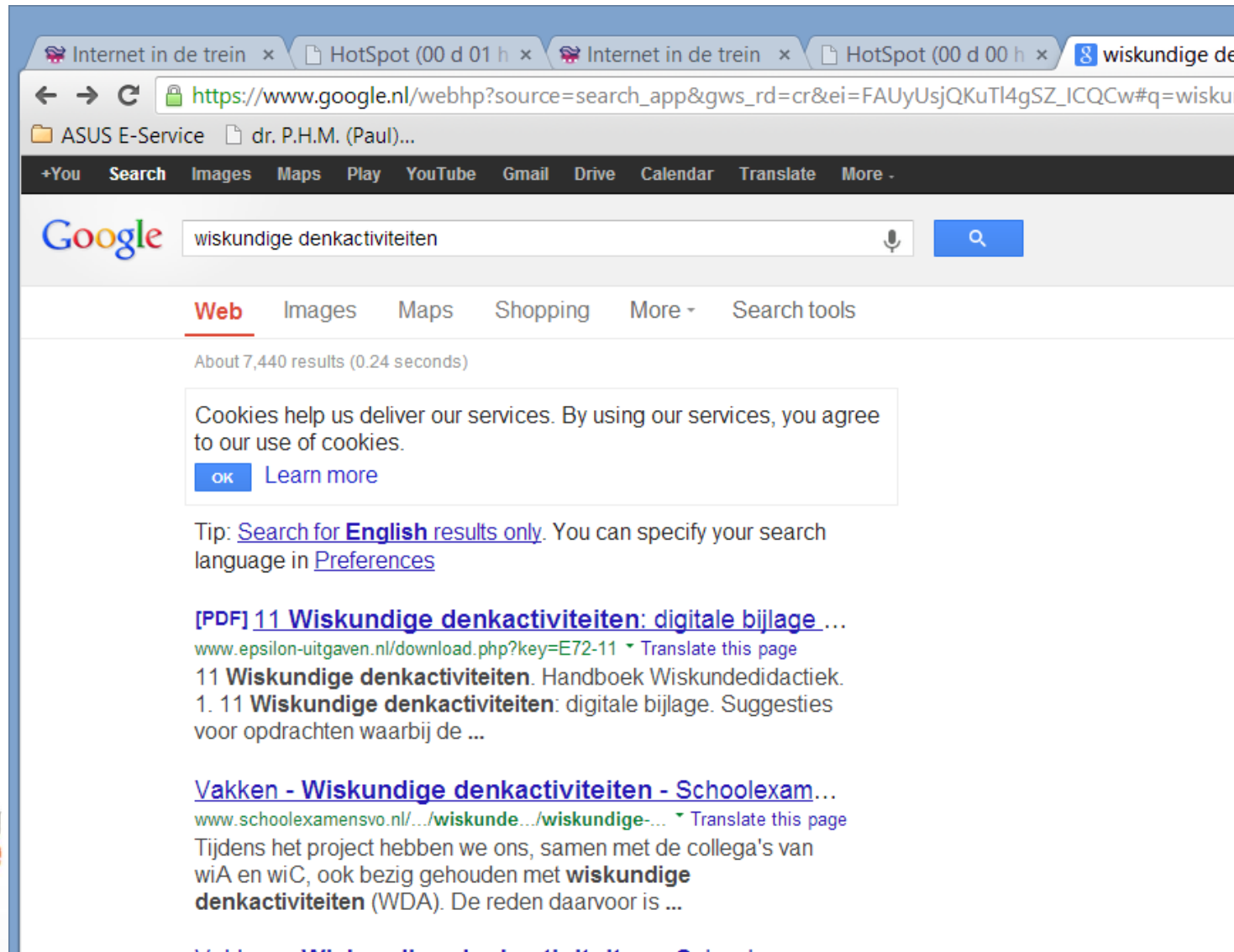
c. $f(x) = x^3$

d. $f(x) = (1/3)^x$

Rode draad

- Voorbeelden
- **Wat bedoelen we met denkactiviteiten?**
- Kanttekeningen
- Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?
- Terugblik op voorbeelden

Vraag het Google:



The screenshot shows a web browser window with multiple tabs. The active tab is titled 'wiskundige de'. The address bar shows the URL: https://www.google.nl/webhp?source=search_app&gws_rd=cr&ei=FAUyUsjQKuTI4gSZ_ICQCw#q=wisku. The search bar contains the text 'wiskundige denkactiviteiten'. Below the search bar, the 'Web' tab is selected. The search results show 'About 7,440 results (0.24 seconds)'. A cookie notice is displayed: 'Cookies help us deliver our services. By using our services, you agree to our use of cookies.' with 'ok' and 'Learn more' buttons. The first search result is a PDF document: '[PDF] 11 Wiskundige denkactiviteiten: digitale bijlage ...' from www.epsilon-uitgaven.nl/download.php?key=E72-11. The second result is 'Vakken - Wiskundige denkactiviteiten - Schoolexam...' from www.schoolexamensvo.nl/.../wiskunde.../wiskundige-....



“Wiskundige DenkActiviteiten” ...

- ... is geen welomschreven construct in de wiskundededidactiek
- Dan doen we het zelf maar:
We spreken van wiskundige denkactiviteit als leerlingen

niet-routine problemen oplossen die een beroep doen op analytisch denken, creativiteit, strategieontwikkeling, flexibiliteit en reflectie.



“... niet-routine problemen...”

Dus WDA is **relatief**, hangt af van voorkennis / niveau / leeftijd / onderwijssetting / ...

- De vergelijking $(x - 2)^2 + 7 = 16$:
routinesom in de loop van klas 3
- Maar een WDA voor een tweedeklasser die dit type vergelijking voor het eerst ziet?

WDA volgens cTWO (2007, 2013)



Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

4

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.



Waarom aandacht voor WDA?

- Omdat wiskunde meer omvat dan procedurele kennis
- Om tegenwicht te bieden aan een te eenzijdige nadruk op 'symbol pushing' in de curricula

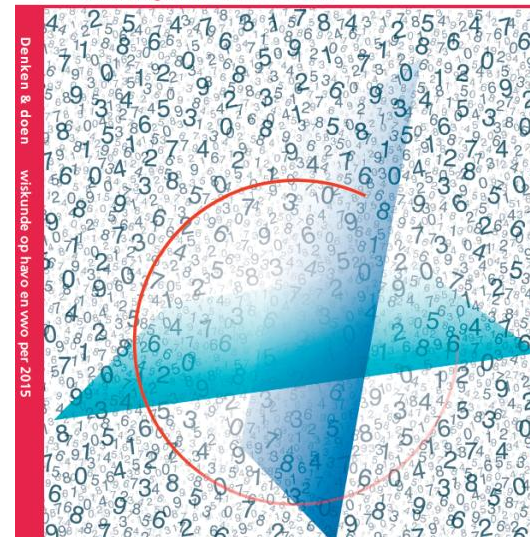


Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

Denken & doen

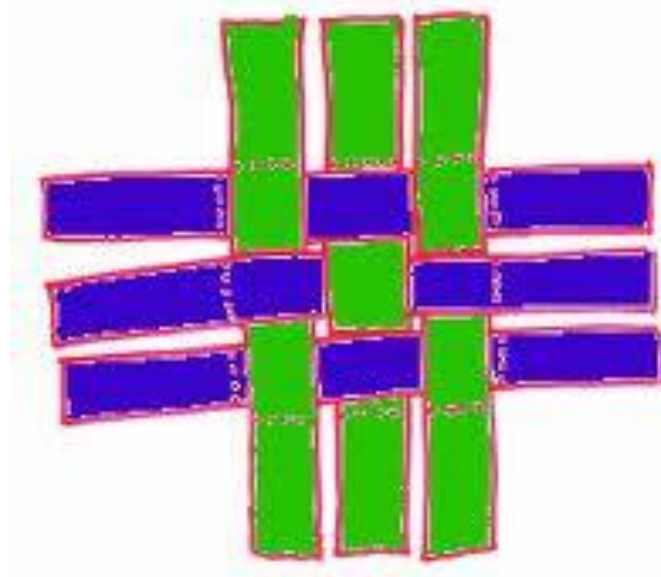
wiskunde op havo en vwo per 2015

Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO



Waarom aandacht voor WDA?

- Omdat je in het wiskundeonderwijs procedurele vaardigheden en conceptuele inzichten met elkaar wilt vervlechten



Cf reproductie – productie

Reproductie

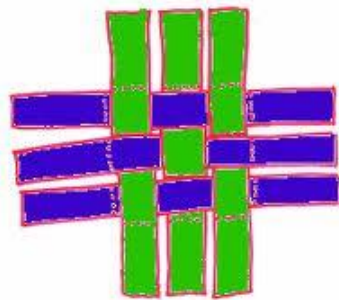
- Van leerlingen wordt verwacht dat ze direct herkennen welke kennis of vaardigheid leidt tot een correct antwoord. Het gaat in die opgave om het toetsen van “**Weten dat**”, feitelijke kennis en algoritmische methoden die leerlingen paraat moeten hebben.

Productie

- Een opgave van dit type noemen we meestal een probleem. Er bestaat pas een probleem, wanneer een persoon de oplossing niet onmiddellijk kan geven of een algoritmische methode kan vinden. Een probleem vraagt in die definitie om een analyse van de probleemsituatie en een zoekprocedure.

Verwevenheid

Wiskundige denkactiviteiten zijn onderling verweven. Het gaat er in de lespraktijk om werk te maken van deze verschillende aspecten, zodat leerlingen niet alleen kennis memoriseren en reproduceren maar ook een zekere bekwaamheid ontwikkelen in het gebruiken en toepassen van deze wiskundige kennis.



Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

Idee van WDA niet nieuw:

- **Problem solving** concerns solving non-routine tasks, for which students don't have a ready-made strategy available (Alan Schoenfeld, 2007).
- George Pólya (1887 – 1985):
... first and foremost, it should teach those young people to THINK.



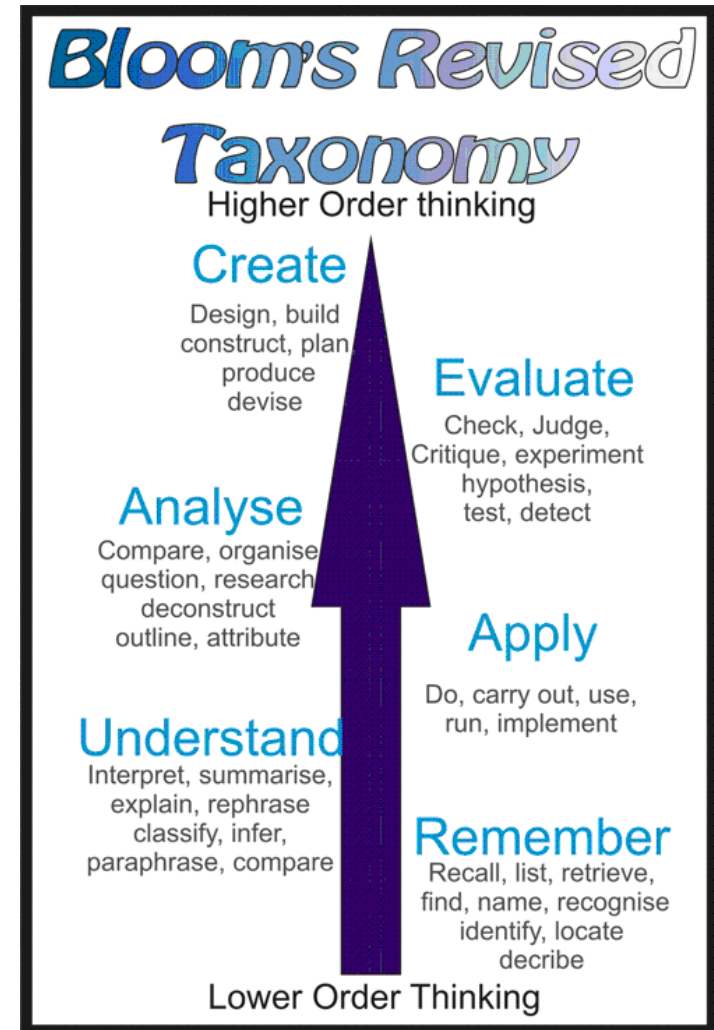
Pólya's fasen van probleemoplossen

1. Het probleem begrijpen
 2. Een plan maken
 3. Het plan uitvoeren
 4. Terugkijken
- Maar dit is geen lineair proces!
 - Ons onderwijs stelt vaak fase 3 centraal, terwijl 1-2-4 cruciaal zijn (en het moeilijkst?).

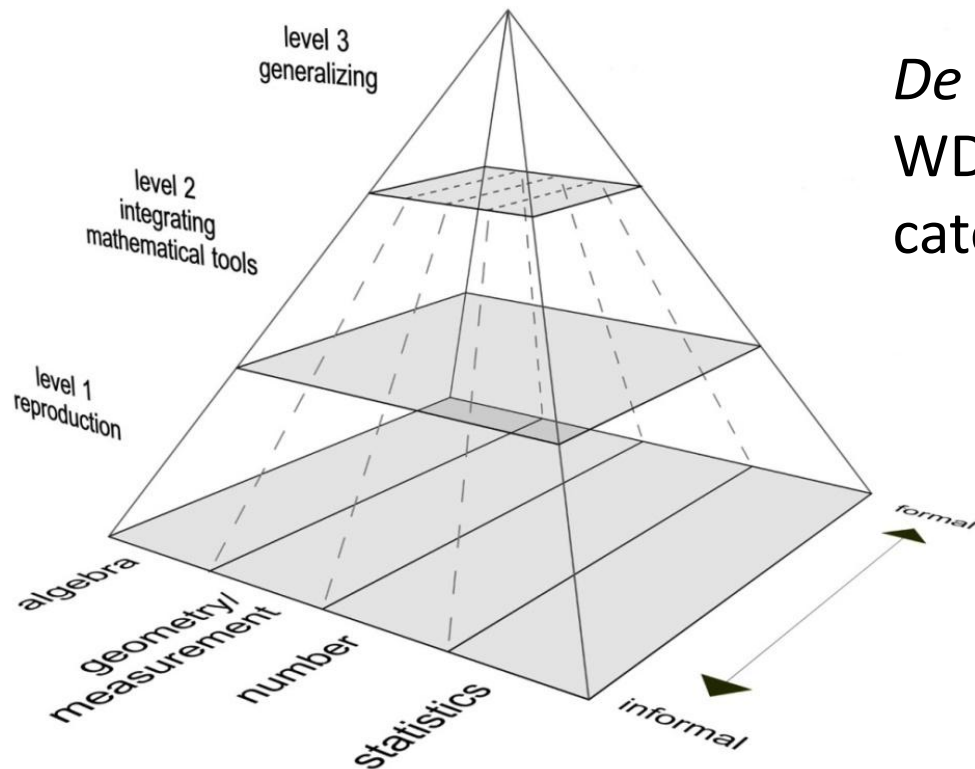
WDA in Bloom's taxonomy

- LOTS & HOTS: *lower* resp. *higher* order thinking skills. (Bloom, 1956; Anderson & Krathwohl, 2001)
- WDA staat sterk aan de kant van de HOTS

<http://www.celt.iastate.edu/teaching/RevisedBlooms1.html>



WDA in het PISA framework



De PISA toetspiramide :
WDA passen in de hoogste
categorie van

- Reflection
- Connections
- Reproduction



WDA en realistisch wiskundeonderwijs

Zich REALiseren:

- Je voorstellen
- Je bewust zijn van
- Betekenis geven aan

Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... realistisch? [Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31\(1\)](#), 17-19.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), [Encyclopedia of Mathematics Education](#). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.



In elke aflevering van de rubriek *Wat bedoelen ze toch met...* staat een spraakmakend begrip uit de wiskundendidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. Wat wordt met het wetenschappelijk jargon bedoeld en hoe vertaalt zich dit naar de onderwijspraktijk? In de eerste aflevering schrijft **Paul Drijvers** over het woord 'realistisch' in de uitdrukking 'realistisch wiskundeonderwijs'.

Wat bedoelen ze toch met... *realistisch*?

Rubriek

Inleiding

Het Nederlandse wiskundeonderwijs wordt zowel in eigen land als daarbuiten veelal beschouwd als realistisch. Over realistisch wiskundeonderwijs (in het Engels *Realistic Mathematics Education* of RME) is veel geschreven. Maar hoe is dit woord eigenlijk in de wiskundendidactiek terecht gekomen? Wat wordt er mee bedoeld en welke misverstanden bestaan erover? Is ons onderwijs wel zo realistisch? Over deze vragen gaat dit korte stuk.

Een voorbeeld uit de praktijk

64 Het grasveld van meneer Kok is 15 bij 20 meter. Meneer Kok besluit het grasveld te vergroten. Aan twee kanten komt er een even brede strook van x meter bij. Zie figuur 7.16.

a Toon aan dat de oppervlakte van het vergrote grasveld gegeven is door $\text{opp} = x^2 + 35x + 300$.

b Het nieuwe grasveld heeft een oppervlakte van 374 m^2 .

Stel een vergelijking op en bereken hoeveel meter de strook breed is.

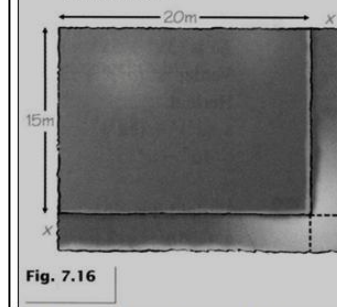


Fig. 1 Opgave uit een Nederlandse wiskundemethode.

Figuur 1 toont een opgave uit een al wat oudere editie van een Nederlandse wiskundemethode. Het gaat om klas 3 hv. Ik heb deze opgave bij verschillende gelegenheden aan wiskundeleraars in opleiding voorgedragen met de vraag hoe ze oordelen over het realistische karakter ervan. De uitkomst was steeds positief.

Ik deel dit positieve oordeel niet. Natuurlijk, een tuintje met een gazon is heel voorstelbaar en op parkeerterreinen van tuincentra worden op zaterdagochtend de rolletjes graszoden massaal in de auto geladen. Maar als je met die rolletjes aan het sjouwen bent, dan weet je toch ook wel hoe breed ze ongeveer zijn? En als je je gazon uitbreidt, dan heb je toch een plan voor de nieuwe afmetingen? En stel dat je maar wat deed en na afloop wilt weten wat het is geworden, dan ga je toch niet lengte en breedte meten, om dan een rekenmachine te zoeken, de afmetingen te vermenigvuldigen en te zien dat je nu 374 m^2 hebt en je vervolgens af te vragen hoe breed de strook is? Meet die breedte dan meteen op, zou ik zeggen! Het zijn vast dergelijke opgaven die Keune in zijn oratie in 1998 al deden schrijven:

De nieuwste trend in het wiskundeonderwijs is realistische wiskunde. Ik heb al betoogd dat wiskunde bij uitstek abstract is. Wiskunde is niet realistisch. Realistische wiskunde bestaat niet. Met zoiets bereik je niks, evenmin als met abstract voetballen. (Keune, 1998)

Realistisch in theorie

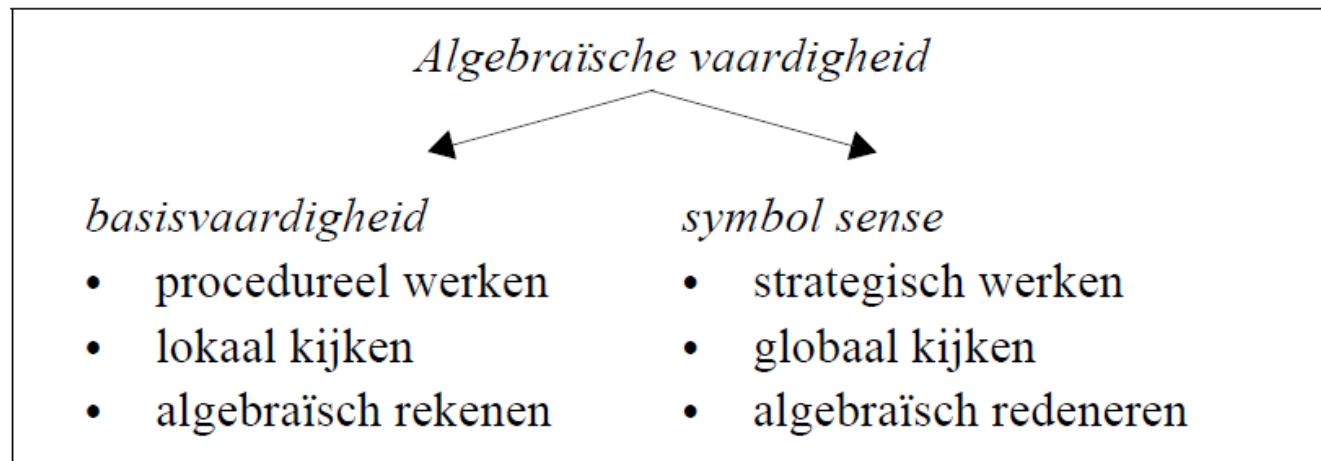
In 1979 gebruikte Treffers het woord 'realistisch' voor het eerst als hij schrijft:

De realistische richting waartoe Wiskobas zich rekent, gaat uit van de realiteit, i.e. de wereld van het kind, wat inhoudt dat zij probeert de verschijningsvormen van wiskundige fenomenen op te sporen die in de wereld van het kind passen, dus waaraan het kind betekenis en zin kan geven. (Treffers, 1979, p. 12-13)

Verderop in genoemde bundel vergelijkt hij de 'realistische richting' met de structurele en de empirische. Het Engelse 'realistic mathematics education' komt voor het eerst voor in de titel van een bijdrage van

WDA en algebra

- WDA zit aan de symbol sense kant van algebraïsche vaardigheid



- Drijvers, P., Van Streun, A., & Zwaneveld, B. (Red.)(2012). [Handboek Wiskundendidactiek](#). Utrecht: Epsilon.



Rode draad

- Voorbeelden
- Wat bedoelen we met denkactiviteiten?
- **Kantttekeningen**
- Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?
- Terugblik op voorbeelden

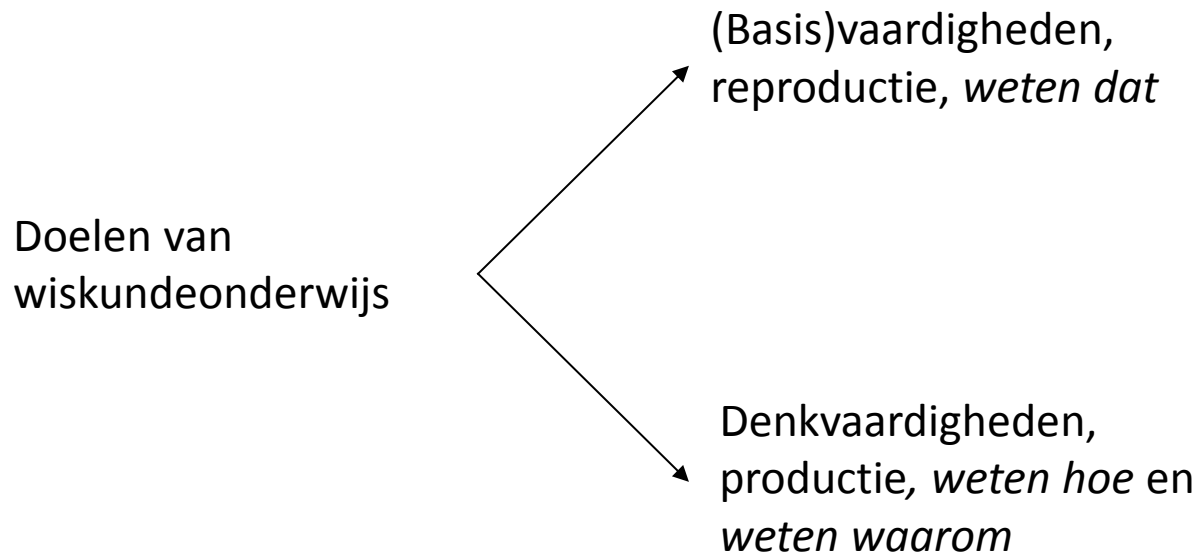
Belang van WDA hangt samen met doelen van wiskundeonderwijs

- Voorbereiden op vervolgonderwijs?
- Voorbereiden op beroepspraktijk?
- Voorbereiden voor 'een lang en gelukkig leven met wiskunde'?

De afweging van deze doelen kan van invloed zijn op het belang dat je hecht aan WDA.



Belang van WDA hangt samen met doelen van wiskundeonderwijs (2)



Zie Polya, 1945; Schoenfeld, 1992; Van Streun, 2012

Hoe leer en onderwijs je WDA?

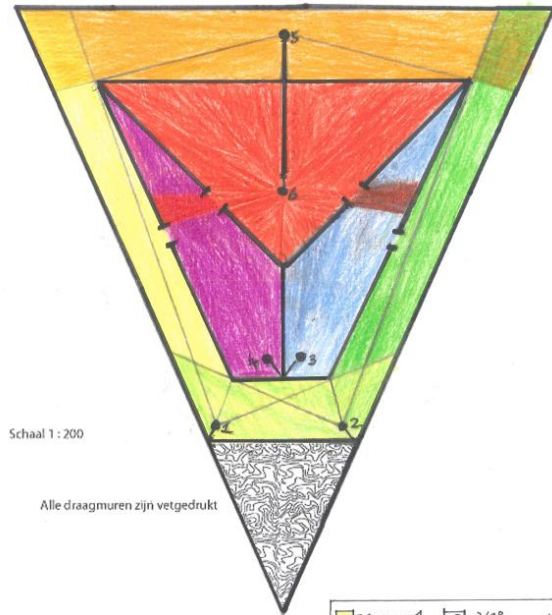
- Hoe organiseer je ‘intellectuele wonderen’?
- Is het eerlijk om procedures te onderwijzen en routinetaken te laten trainen, om vervolgens niet-routine taken te toetsen?
- Worden niet-routine taken door oefening niet al snel routinetaken?
- Kun je leerlingen trainen in het oplossen van niet-routine problemen?
- Hoe past aandacht voor WDA in de leerlijn, in het curriculum, in de dagelijkse lespraktijk, bij het boek, bij het verwerven van basisvaardigheden?

Rode draad

- Voorbeelden
- Wat bedoelen we met denkactiviteiten?
- Kanttekeningen
- **Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?**
- Terugblik op voorbeelden

Open teamopdrachten: OnderbouwWiskundedag

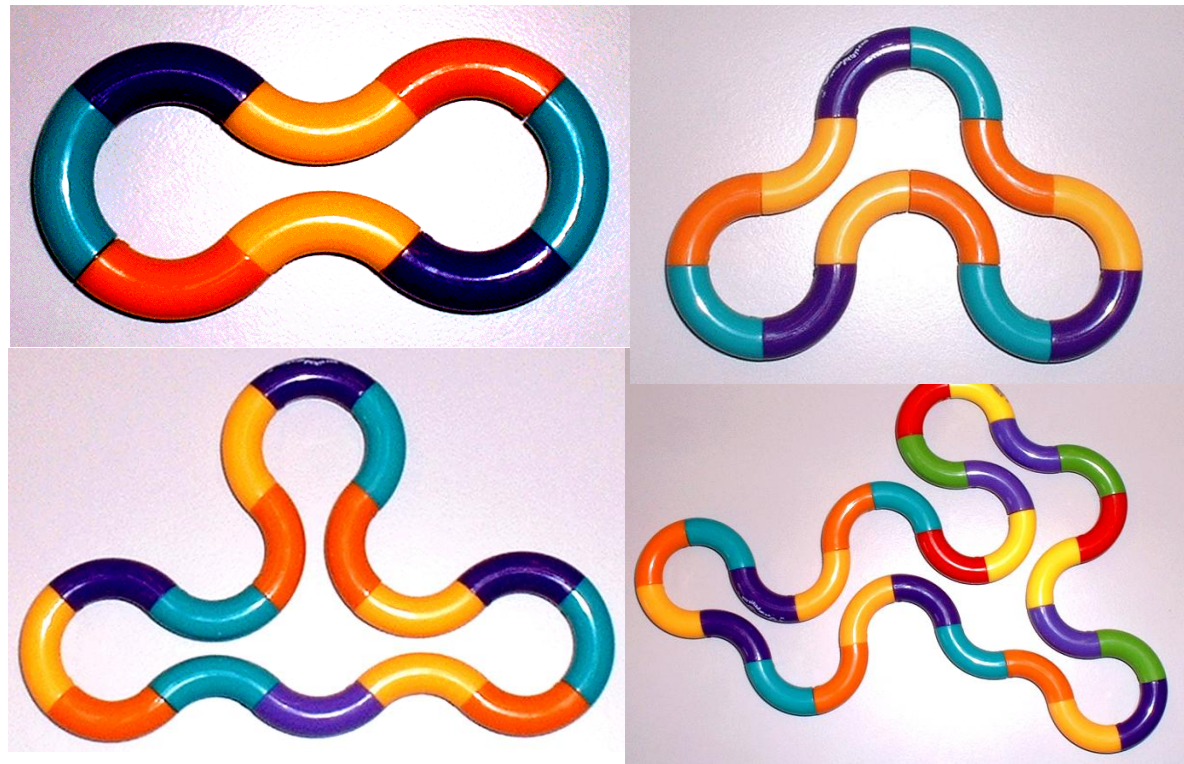
- Mooi, maar het kan een incident blijven



- <http://www.fi.uu.nl/nl/onderbouwwiskunedag/>
- www.ctwo.nl -> onderbouw

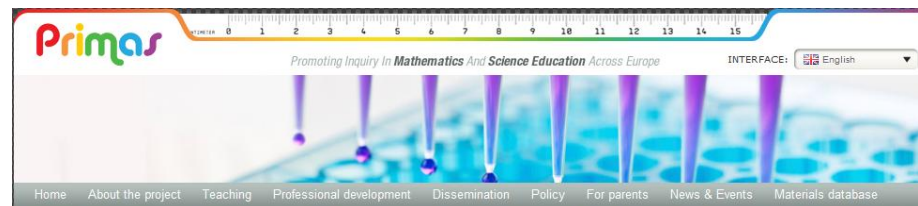
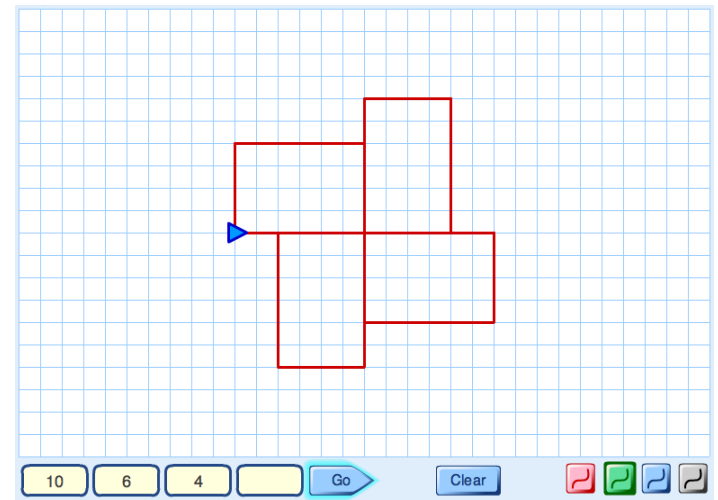
Open teamopdrachten: Alympiade / B-dag

- Mooi, maar wel de kans dat het een incident blijft



Onderzoekend leren / Inquiry-based learning

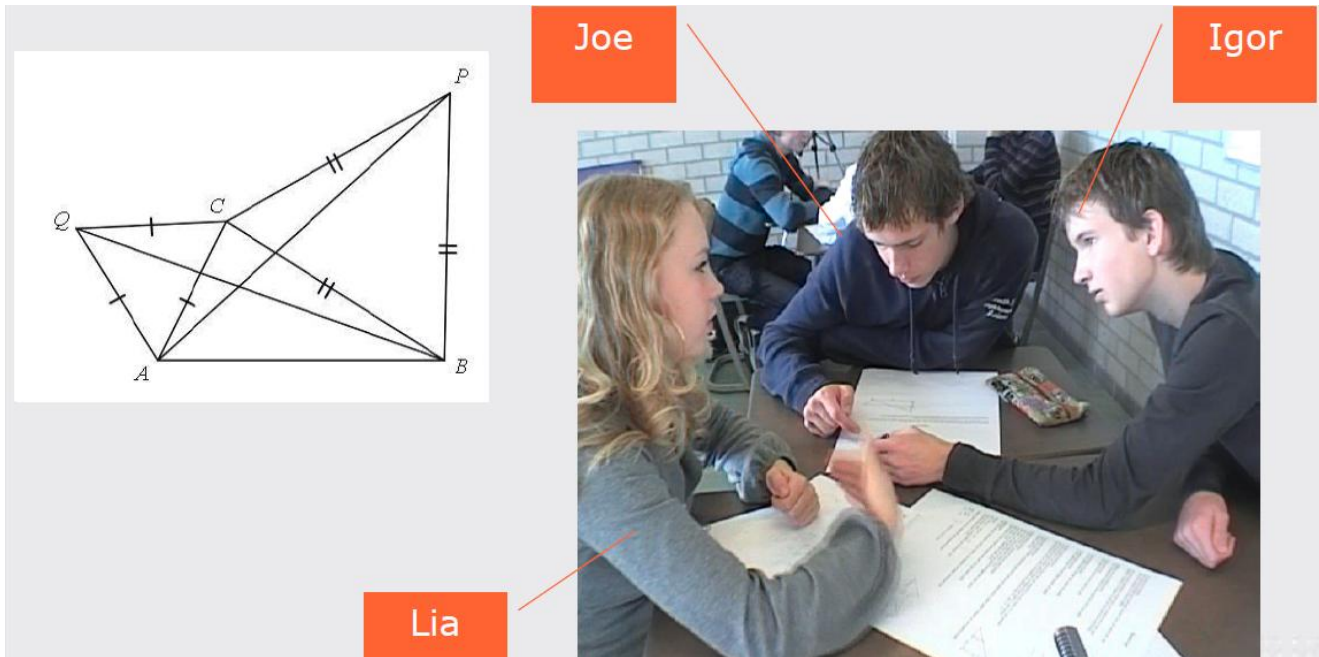
- Zie www.primas-project.eu



Gewone opdrachten en activiteiten aanpassen

- Zie het proefschrift van Sonia Palha:

<http://dare.uva.nl/record/445577>

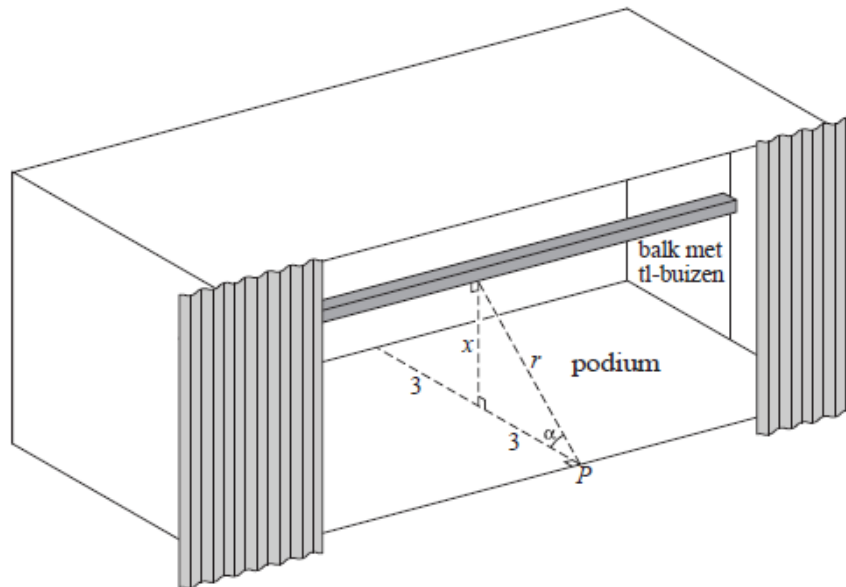


Het CE aanpassen

Podiumverlichting

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P . De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



VWO2007-1

Het CE aanpassen (2)

De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin \alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

$$\text{Er geldt: } V = \frac{650x}{9+x^2}.$$

3p 1 Toon aan dat deze formule juist is.

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.

5p 2 De verlichtingssterkte op het podium in punt P moet minimaal 100 lux zijn. Bereken langs algebraïsche weg op welke hoogtes de balk mag hangen.

6p 3 Er is een hoogte van de balk waarbij V maximaal is. Bereken deze hoogte langs algebraïsche weg.

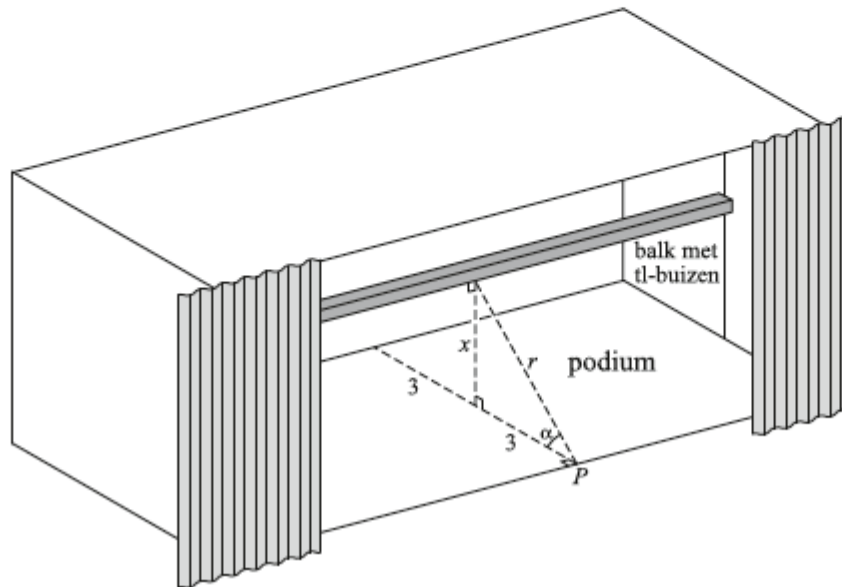
VWO2007-1

Het CE aanpassen (3)

XVII Podiumverlichting

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P . De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie de figuur.

figuur



Voorbeeldexamen Pilot VWO

Het CE aanpassen (4)

De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin \alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.

De verlichtingssterkte op het podium in punt P moet minimaal 100 lux zijn.

6p 1 Bereken op welke hoogtes de balk mag hangen.

Het CE aanpassen (5)

Opgave	Mo - Al	Or - St	An - Pr	Fo	Ab	Lo - Be
IX In een regelmatige achthoek						
1			X			
X Aan lijnen rakende cirkels						
1	X			X		
2	X			X		
XI Een scheve hyperbool						
1				X		

Bij de vragen van de voorbeeldexamenopgaven is op de volgende bladzijde aangegeven welke denkactiviteiten aan de orde zijn. Ter toelichting op de kruisjes:

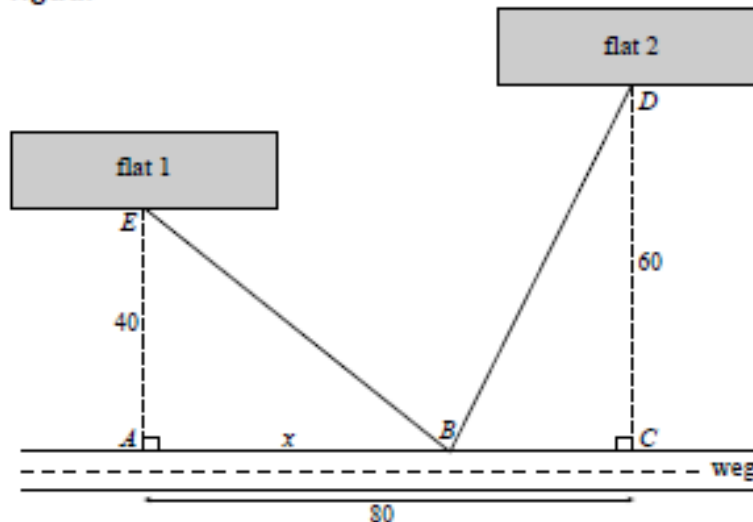
- Modelleren-Algebraïseren is aangekruist als er sprake is van het vertalen van een kenmerk, vraag of eigenschap in termen van algebra.
- Analyseren-Probleemoplossen is aangekruist als er sprake is van een probleemaanpak die meerstaps is, of op een andere manier niet direct standaard.
- Formules manipuleren is aangekruist als een vergelijking moet worden opgelost of een formule moet worden herschreven.

Het CE aanpassen (6)

Bushalte

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend.

figuur



Het CE aanpassen (7)

De totale lengte van de twee voetpaden L in meters wordt gegeven door de formule:

$$L = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$$

Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is. Hierdoor hoeft er minder dan 132 meter voetpad aangelegd te worden.

6p 11 Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter minder.

Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

7p 12 Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter de totale lengte van de twee voetpaden dan minder is dan 132 meter.

Regulier ($p' = .33$)

Pilot ($p' = .29$)

Suggesties om WDA te bevorderen

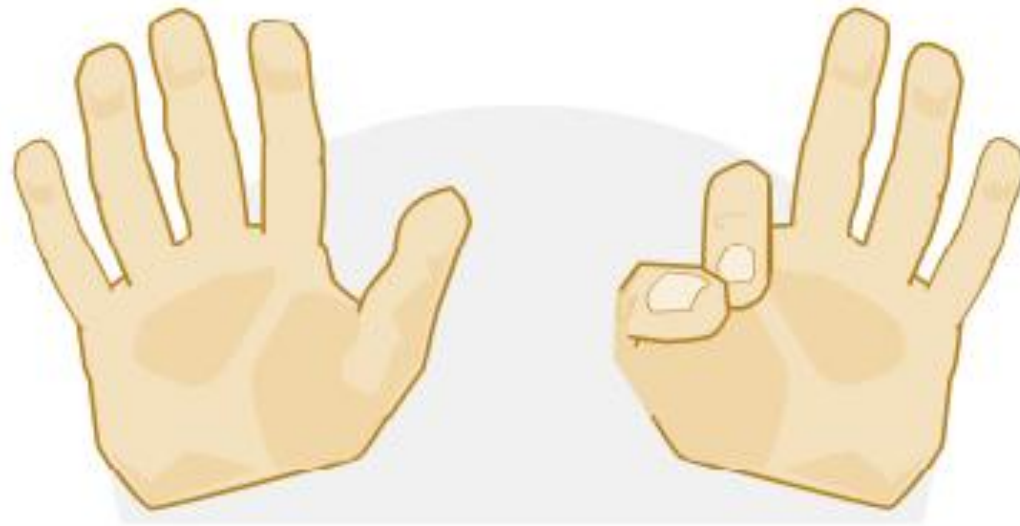
- Zoek interessante / uitdagende / originele / motiverende activiteiten die in elk geval tot een zekere mate van succes leiden...
- ... maar bereid de leerlingen ook voor op enige frustratie
- Bedenk manieren om 'traditionele' opgaven aan te passen tot 'denkactieve' opgaven, dus die leerlingen aanzetten tot denken
- Geef de leerlingen genoeg tijd om te analyseren, experimenteren, vermoedens te krijgen, te verkennen, en heb geduld met hen
- Bespreek ook de heuristieken expliciet
- Benadruk flexibiliteit, blikwisseling en variatie
- Waardeer de methode, de aanpak, het proces en minder het eindresultaat (cf Johnson & Rising, 1972)



Rode draad

- Voorbeelden
- Wat bedoelen we met denkactiviteiten?
- Kanttekeningen
- Hoe kun je denkactiviteit bevorderen?
- **Terugblik op voorbeelden**

Vingerrekenen



<http://www.mathematikum.de/>



Dank voor uw aandacht!

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl

www.uu.nl/Staff/PHMDrijvers
2013-09-20

